Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero–Marzo Modelo 2008

Nombre: ______________________________

Carnet: ____________________ Sección: ________

MA-3111-2:30 p.m.—Segundo Parcial, lunes 7-04-2008, 50%—A

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER; $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y 0 en otro caso.

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$(1/\lvert a\rvert)\hat{f}(\omega/a)$
$f_{gen}^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$i^n \hat{f}_{gen}^{(n)}(\omega)$
$e^{-cx^2/2}$	$(1/\sqrt{2\pi c})e^{-\omega^2/2c}$

$1/(c^2+x^2)$	$(1/2c)e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$c/[\pi(c^2+\omega^2)]$
$(\operatorname{sen} cx)/x$	$(1/2)1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$(\operatorname{sen} c\omega)/\pi\omega$
1	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$1/2\pi$
$f(x)g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(\omega)$

$\hat{f}(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$
$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$

---

1. (8 ptos.) Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ e^{-3x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) (2 ptos.) Justifique por qué es posible hallar la transformada de Fourier de $f(x)$
b) (6 ptos.) Encuentre la transformada de Fourier de $f(x)$ usando la definición.

2. (10 ptos.) Aplicando la igualdad de Plancharel halle $\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)}{4x^2}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

3. (10 ptos.) Encuentre una función $f(x,t)$ que satisface la ecuación de ondas $f_{xx} = f_{tt}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ con las condiciones iniciales $f(x, t=0) = e^{-\lvert x\rvert}$ y $\partial_t f(x,0) = 0$ usando la transformada de Fourier.

4. (12 ptos.) Usando el método de separación de variables y la transformada de Fourier, resuelva el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación del calor

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t \ge 0$$
$$u(x,0) = \operatorname{sen}(x)/x, \quad x > 0$$
$$u(0,t) = 0 \quad t > 0$$
$$u(x,t) \text{ acotada en } x > 0,\ t > 0$$